

INVESTIGAÇÕES NA AULA DE MATEMÁTICA

O que são Actividades de Investigação?

Uma vez que existe uma profusão de formulações sobre o que se entende por "investigações matemáticas", é necessário explicitar o sentido que lhes atribuímos neste projecto. As investigações matemáticas são parte do que alguns autores designam por "actividade matemática", o que corresponde a identificar *aprender* Matemática com *fazer* Matemática. Nesta perspectiva, esta ciência é encarada mais como uma forma de gerar conhecimento do que como um corpo de conhecimentos. Love (1988) define implicitamente este tipo de actividade, ao afirmar que os alunos devem ter oportunidade de:

- identificar e iniciar os seus próprios problemas;
- expressar as suas próprias ideias e desenvolvê-las ao resolver problemas;
- testar as suas ideias e hipóteses de acordo com experiências relevantes;
- defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros à crítica ponderada. (p. 260)

Um conceito muito próximo de investigação matemática é o de resolução de problemas. Os dois termos são usados muitas vezes de modo indistinto. Ambas as noções se referem a processos matemáticos complexos e ambas envolvem actividade fortemente problemática. A resolução de problemas envolve uma grande variedade de tarefas, tanto de cunho mais fechado como mais aberto, tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida real. "Actividades investigativas" ou "investigações matemáticas" designam, no contexto deste projecto, um tipo de actividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. São actividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta quer pelo professor, quer pelos alunos.

O aspecto mais distintivo das actividades de investigação em relação à resolução de problemas diz respeito à natureza da questão a estudar. Enquanto que na resolução de problemas a questão tende a ser apresentada já completamente especificada ao aluno, na actividade de investigação as questões iniciais são de um modo geral vagas, necessitando de ser trabalhadas, tornadas mais precisas e transformadas em questões concretas pelo próprio aluno. As actividades de investigação envolvem assim uma componente essencial de formulação de problemas, etapa normalmente ausente (porque já cumprida de antemão pelo professor) na resolução de problemas.

Outra distinção diz respeito às estratégias a seguir. Enquanto que na resolução de problemas faz sentido sugerir heurísticas gerais (como as de Pólya, 1945) ou estratégias mais específicas (como as de Schoenfeld, 1982), nas actividades de investigação o leque de possibilidades é de tal maneira vasto que se torna difícil fazer semelhante sistematização.

Assim, enquanto que na resolução de problemas o objectivo é a estratégia seguida e a solução a que conduz, na actividade de investigação o objectivo é a compreensão de um domínio problemático. Esta distinção é bem ilustrada na metáfora geográfica: "o objectivo é a jornada, não o destino" (Pirie, 1987, p. 2). A mesma ideia é reforçada por Ernest (1991) ao referir que nesta actividade "a ênfase está na exploração de uma terra desconhecida" (p. 285), enquanto que na resolução de problemas se procura encontrar um caminho que conduza à solução ou soluções. O

processo investigativo tem, assim, um carácter mais divergente do que, em geral, a resolução de um problema.

Para que uma situação possa constituir uma investigação é essencial que seja motivadora e desafiadora, não sendo imediatamente acessíveis, ao aluno, nem o processo de resolução nem a solução ou soluções da questão. As actividades de investigação contrastam-se claramente com as tarefas que são habitualmente usadas no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que são muito mais abertas, permitindo que o aluno coloque as suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir. Numa investigação parte-se de uma situação que é preciso compreender ou de um conjunto de dados que é preciso organizar e interpretar. A partir daí formulam-se questões, para as quais se procura fazer conjecturas. O teste destas conjecturas e a recolha de mais dados pode levar à formulação de novas conjecturas ou à confirmação das conjecturas iniciais. Neste processo podem surgir também novas questões a investigar.

As investigações matemáticas caracterizam-se, igualmente, pelo estímulo que fornecem ao aluno para este justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações perante os seus colegas e o professor. As capacidades de argumentação e prova são dois aspectos destacados da capacidade de comunicar matematicamente. O desenvolvimento desta capacidade é, também, um dos grandes objectivos educacionais do ensino da Matemática (NCTM, 1991). Ao confrontarem as suas diferentes conjecturas e justificações, os elementos da turma constituem-se como pequena comunidade matemática, na qual o conhecimento matemático se desenvolve em conjunto.

O trabalho do aluno aproxima-se, assim, do trabalho do matemático. Ernest (1991), afirma mesmo que, "a actividade matemática de todos os alunos de Matemática, desde que produtiva, envolvendo a formulação e a resolução de problemas, não é qualitativamente diferente da actividade do matemático profissional" (p. 283). Para este autor, a actividade matemática do aluno, se bem que possuindo um reduzido grau de complexidade de acordo com os seus conhecimentos matemáticos, compara-se à do matemático em termos dos processos a que recorre.

A Preparação de Aulas de Investigação

Este modo de ver a aprendizagem vem, naturalmente, relativizar a importância dos conteúdos no currículo. Ainda que estes continuem a constituir o suporte da actividade, o desenvolvimento de capacidades de ordem superior torna-se um objectivo destacado, e os processos característicos da actividade matemática passam a constituir o foco do ensino. Como defende Lerman (1989), "a Matemática é identificada por modos particulares de pensar, conjecturar, procurar contradições formais e informais, etc, não pelo 'conteúdo' específico" (p. 77). Porém, dado que os programas vigentes se centram nos conteúdos, organizados de uma forma hierárquica e compartimentada, o professor tem necessidade de fazer surgir as investigações matemáticas na aula em ligação com eles. Isto não significa que, em cada momento, as propostas tenham obrigatoriamente que introduzir ou explorar conceitos que estão a ser abordados. Significa apenas que se referem de modo especial a certos tópicos do programa ao mesmo tempo que permitem que os alunos recorram a todo o arsenal matemático de que já dispõem.

O ponto de partida de uma investigação, tal como foi pensado pelo professor, pode relacionar-se de modo mais ou menos directo com um ou outro tema do currículo. Mas a actividade que o aluno realiza, particular e única, pode originar outras questões, seguir por caminhos inusitados e acabar por se relacionar com muitos outros temas. Há que procurar um ponto de equilíbrio entre a preocupação de seguir de forma ordenada

o currículo e a valorização da natureza aberta das investigações, reconhecendo o contributo importante que estas podem fornecer para o desenvolvimento matemático dos alunos.

O professor tem um papel fundamental na planificação de actividades de investigação na sala de aula. A selecção das propostas e o estabelecimento de objectivos para a sua realização relacionam-se com a especificidade da turma e com o contexto em que surgem na aula. Nem os objectivos nem as tarefas podem ser completamente definidos, de antemão, pelos autores dos programas. O professor surge, deste modo, como alguém que participa no processo de elaboração do currículo - delineando objectivos, metodologias e estratégias, e reformulando-os em função da sua reflexão sobre a prática.

A maior ou menor ligação das actividades de investigação com os conteúdos pode ser um dos factores que restringe ou amplia o tempo disponível para a sua realização. O professor é confrontado com decisões difíceis quanto à gestão do tempo devido ao número elevado de aspectos que necessita de relativizar e conjugar. Para além de definir qual o peso relativo que estas actividades devem ocupar no cômputo das actividades de uma turma, tem também de ponderar sobre a frequência com que elas devem surgir: será mais vantajoso para os alunos aparecerem várias tarefas de investigação em sequência ou, pelo menos, com grande proximidade, ou mais espaçadas ao longo do ano?

A articulação com os conteúdos leva também a questionar em que medida podem as investigações ser propostas no início, durante ou no fim de um assunto. Se a tarefa de investigação for introduzida num momento qualquer, que pontes se podem estabelecer com o trabalho já desenvolvido?

Ao seleccionar ou criar uma tarefa, o professor deve definir claramente os objectivos a atingir e ter em atenção o nível etário e o desenvolvimento matemático dos alunos. A maior ou menor familiaridade dos alunos com este tipo de actividade é um factor muito importante a considerar.

Quer a criação quer a reformulação das propostas de investigação são actividades que consomem tempo e exigem do próprio professor uma atitude investigativa. A natural insegurança do professor num tipo de trabalho que ainda não domina, aliada ao investimento que exige, especialmente quando faltam os recursos apropriados na escola, podem constituir obstáculos senão intransponíveis, pelo menos limitantes ao desenvolvimento deste tipo de actividade.

Uma investigação matemática pode-se iniciar em condições muito variadas. No entanto, existem questões e situações que são potencialmente mais ricas. A atenção que deve merecer a escolha de uma tarefa encontra-se expressa nas seguintes palavras de Ollerton (1994):

Uma parte importante da minha planificação tem a ver com o encontrar tarefas que:

- sejam um começo apropriado para todos na aula trabalharem;
- forneçam oportunidades ricas para muitos desenvolvimentos;
- possibilitem que sejam trabalhadas uma variedade de competências de conteúdo;
- criem oportunidades para os alunos explorarem ideias e colocarem questões;
- apoiem diferentes tipos de intervenções do professor desde o colocar questões ao explicar e expor;
- permitam aos alunos tomar a maior parte da responsabilidade no seu desenvolvimento;

- tenham uma variedade de resultados, alguns dos quais podem ser inesperados;
- permitam que o conteúdo seja processado;
- extraiam contextos transcurriculares "reais", tais como usar de informação de um jornal, ou contextos de resolução de problemas;
- sempre que possível tenham um começo prático de forma a prover experiências concretas a partir das quais abstrações possam ser feitas. (p. 64)

Este professor indica diversos aspectos que devem ser contemplados na criação e selecção de tarefas de cunho exploratório e investigativo. Saliente-se, por exemplo, a preocupação com a possibilidade de os alunos desenvolverem múltiplas abordagens e colocarem questões, bem como com a adequação da tarefa inicial a todos os alunos.

Nesta mesma linha de pensamento, Lampert (1990) chama-nos a atenção para o que considera ser o principal critério de selecção de um problema, entendido como situação problemática. Para a autora, os problemas devem levar todos os alunos a fazerem e testarem conjecturas, que são, posteriormente, alvo de discussão na turma. Numa das propostas que apresentou aos seus alunos procurava potenciar a sua progressão em direcção a ideias matemáticas mais complexas e abstractas, ou ainda, segundo as suas palavras, criar "um cenário para um ziguezague entre a observação indutiva e a generalização dedutiva, que Lakatos e Pólya vêem como características da actividade matemática" (p. 39).

A ideia de que as situações a propor devem ser abertas, no sentido de estimularem o aluno a colocar as suas próprias questões, é um dos aspectos mais fortes das tarefas de natureza investigativa. Este grau de abertura pode até mesmo traduzir-se em propostas não necessariamente na forma interrogativa. Lerman (1989), ilustra este último caso, através da situação:

Considera triângulos de lados inteiros. Existem três triângulos com 12 unidades de perímetro. Investiga. (p. 77)

Em seguida apresenta uma figura com três triângulos com a indicação da medida do comprimento de cada um dos lados. Esta "situação", em que não é colocada nenhuma pergunta, permite a formulação de problemas diversos de acordo com o interesse e conhecimento matemático do aluno. Todavia, há que ser cuidadoso ao introduzir estas situações no processo de ensino-aprendizagem porque podem-se tornar algo frustrantes para os alunos que, no dia-a-dia da aula de Matemática, lidam apenas com questões muito estruturadas. Por outro lado, podem também criar uma certa insegurança ao professor visto que envolvem uma grande margem de imprevisibilidade.

Após a selecção da situação a propor, segue-se uma fase não menos importante: o planeamento da aula. As questões ligadas à organização e gestão da aula são tanto mais relevantes quanto menor é a experiência do professor nesta área. Decisões sobre se os alunos irão trabalhar individualmente ou em grupo, como se irão constituir os grupos, e se haverá momentos de trabalho em grande grupo, dependem não só da natureza da tarefa apresentada mas, principalmente, dos objectivos estabelecidos pelo professor.

O modo de trabalho escolhido será um dos factores a ter em conta para se prever o tempo de duração da actividade. Será possível realizar a investigação numa única aula? Por quanto tempo conseguirão os alunos manter-se interessados na tarefa?

Frequentemente, a estrutura escolhida pelo professor para uma aula de investigação consiste nas seguintes fases:

- introdução da tarefa pelo professor (quer seja apenas um ponto de partida ou uma questão bem definida) e arranque da sua realização pelos alunos (interpretação da situação e definição do caminho a seguir);
- realização da tarefa (durante a qual o professor interage com os alunos individualmente ou em pequeno grupo); e
- apresentação de resultados pelos alunos e sua discussão (comparação das interpretações da tarefa, estratégias seguidas e resultados obtidos; neste ponto é frequente surgirem novas questões para futura investigação).

Por vezes, as discussões intermédias do professor com um grupo de alunos ou mesmo com toda a turma durante a fase da realização da tarefa mostram-se bastante profícuas. Numa aula de investigação, mais do que em qualquer outra, não é possível prever com exactidão o que irá acontecer. É, pois, necessária uma grande flexibilidade na preparação de uma aula deste tipo.

A Realização de Aulas de Investigação

O modo como a tarefa de investigação é apresentada aos alunos constitui um elemento extremamente relevante da actuação do professor:

Mesmo os adeptos mais extremistas da Matemática investigativa não acreditam, em geral, que não seja necessária intervenção alguma do professor para que o aluno aprenda. Isso seria esperar que cada indivíduo recriasse, do princípio, toda a Matemática. (Hatch, 1995, p. 37)

A situação, quer tenha sido criada ou recriada pelo professor, é já um refazer, sob a forma de questão, do processo investigativo em que o seu autor se envolveu. Tal como o trabalho do matemático que é publicado aparece com uma forma definitiva, não dando a conhecer o percurso, os avanços e os recuos, também a investigação que é proposta ao aluno surge-lhe burilada e acabada. Com isto quer dizer-se que não é razoável supor que as questões propostas ao aluno o levarão, necessariamente, a percorrer os mesmos caminhos que quem as gerou. Como refere Mason (1978), "o aluno não está no mesmo estado que o originador" (p. 45). O professor não pode antecipar, fidedignamente, todas as suas reacções.

Adicionalmente, a preocupação do professor com a exploração cabal da situação, pode levar a uma construção demasiadamente estruturada da investigação. Como consequência, o aluno tenderá a encarar a proposta de trabalho como um conjunto de tarefas específicas a serem resolvidas, e não como uma investigação cujos objectivos e estratégias são por ele definidos. O grau de abertura das situações depende não só (e talvez, não primariamente) do tipo de questão a investigar mas também da abordagem que é escolhida pelo professor. Quem já se embrenhou numa investigação e tentou transformá-la numa situação a ser apresentada (por escrito ou oralmente), sabe que não é fácil conseguir, sem ser demasiado directivo, colocar questões que levem os alunos a explorarem todas as potencialidades que lhe reconhecemos.

O papel do professor na fase de arranque de uma actividade de investigação é, pois, extremamente importante. De acordo com Mason (1991), "uma questão é apenas um grupo de palavras com um ponto de interrogação" (p. 16), ou seja, uma questão, só por si, pode não gerar investigação. É necessário que o professor manifeste consistentemente uma atitude investigativa no decorrer das suas aulas para, desse modo, influenciar positivamente a curiosidade dos alunos.

Na fase seguinte, tendo os alunos iniciado a actividade, o professor dará atenção ao desenvolvimento do seu trabalho. O apoio a conceder, no sentido de os ajudar a

ultrapassar eventuais bloqueios ou a tornar mais rica a sua investigação, é um dos aspectos mais complexos da intervenção do professor. Tem extrema importância numa investigação a reflexão do aluno sobre o seu trabalho. Esta pode ser estimulada directa ou indirectamente pelo professor. É necessária experiência e sensibilidade para lidar com estes problemas de uma forma bem sucedida.

Num curso criado pelo Shell Centre (1993) para auxiliar os professores na implementação e avaliação da resolução de problemas e de actividades de investigação, apresentam-se indicações sobre a pertinência, ou não, de certas intervenções por parte do professor. Assim, com base na avaliação de um trabalho realizado em mais de 30 escolas, incentiva-se o uso de questões que levem o aluno a reflectir sobre o modo como está a abordar a situação (por exemplo, "o que tentaste fazer?"); recomenda-se alguma moderação no fornecimento de indicações quanto às estratégias (por exemplo, "comprovaste se isso funciona?"); desaconselha-se a referência a aspectos específicos da situação (por exemplo, "por que não experimentas com três fichas?") (p. 191). O objectivo é ir diminuindo a orientação do professor, à medida que o aluno vai ficando mais familiarizado com este tipo de actividade.

Barbara Jaworski (1994) relata amplamente num estudo por si realizado os desafios que esta abordagem metodológica levanta ao professor, um dos quais designa por "tensão-didáctica". E recorda as seguintes palavras de John Mason:

Quanto mais explícito sou sobre o procedimento que espero que os meus alunos efectuem, mais provável é que eles o efectuem sem recurso à compreensão do que o procedimento é suposto indicar; isto é, mais eles tomarão a forma pela substância... Quanto menos explícito sou sobre os meus objectivos (...) menos provável é que eles encontrem o que se pretendia ou que percebam o seu significado. (Mason, 1988, citado em Jaworski, 1994, p. 180)

Em relação a alguns professores que participaram no seu estudo, Jaworski indica como observou essa tensão: "eram relutantes em dizer aos alunos factos que eles queriam que soubessem; no entanto, ficavam contrariados quando esses factos não emergiam através da investigação" (p. 207). Pode observar-se que a implementação destas actividades não é de todo linear, colocando o professor perante inúmeros dilemas.

Um dos grandes objectivos das actividades de investigação é a condução dos alunos a graus progressivos de generalização e de abstracção. Consequentemente, a justificação das conjecturas apresentadas é uma componente importante do seu trabalho. Tal como foi mencionado anteriormente, o grau de formalização dessa justificação depende do nível de desenvolvimento matemático do aluno. No entanto, é tarefa do professor fazer notar ao aluno a necessidade de se "convencer" a si próprio e aos outros dos seus argumentos de forma que, a pouco e pouco, acabe por o fazer espontaneamente (Mason, 1991).

A importância da realização de uma discussão final sobre a actividade dos alunos tem sido referida com alguma insistência por diversos autores. Já no relatório Cockcroft (1982) se encontra a indicação explícita de que sem essa discussão o sentido da investigação se poderia perder. Usualmente, é nesta fase que serão postas em confronto as estratégias, as hipóteses e as justificações que os diferentes alunos ou grupos de alunos construíram, e que o professor assume as funções de moderador. Ele procura trazer à atenção da turma os aspectos mais destacados do trabalho desenvolvido e estimula os alunos a questionarem as asserções dos seus pares. Assim, o desenvolvimento da capacidade dos alunos para comunicar matematicamente

e do poder de argumentação são dois dos objectivos destacados desta fase da actividade de investigação.

O professor tem um papel determinante na feitura de propostas de investigação e na condução de aulas em que os alunos se empenham neste tipo de actividade. Todavia, para que os alunos sintam autenticidade nas suas propostas de trabalho é necessário que ele próprio demonstre um espírito investigativo. Os alunos só poderão compreender plenamente o que significa *fazer* matemática se tiverem oportunidade de o observar como um matemático em acção.

Dificuldade a Ultrapassar

As investigações constituem um meio privilegiado de proporcionar aos alunos uma experiência matemática autêntica, porque facilitam o envolvimento num tipo de trabalho que se encontra muito próximo da actividade matemática, abrangendo o desenvolvimento e a utilização de algumas capacidades de ordem superior que, de um modo geral, não são contempladas noutro tipo de actividades.

Antecipamos nesta reflexão grande parte das dificuldades e limitações referentes à realização de actividades de investigação na aula de Matemática. Muitas delas apontam para a necessidade de investigação aprofundada com base em situações de sala de aula. Passamos, brevemente, em revista algumas questões que se colocam.

Uma das dificuldades decorre das limitações programáticas. A extensão do programa é vulgarmente apontada como impeditiva da diversificação de estratégias na sala de aula. Um aspecto que merece atenção diz respeito às dificuldades manifestadas pelo professor ao tentar articular este tipo de actividades com os conteúdos programáticos e com os constrangimentos de tempo. Por outro lado, será que as investigações, quando apenas surgem como uma actividade esporádica, chegam a promover uma atitude investigativa nos alunos?

Relativamente ao papel do professor no desenvolvimento das aulas surgem questões sobre a organização da turma - os alunos trabalham individualmente ou em grupos? como são formados os grupos? Outras questões referem-se ao apoio a fornecer aos alunos, à gestão do tempo concedido para os alunos realizarem o seu trabalho, à orientação da discussão final e ao modo de avaliar a actividade desenvolvida.

Alguns impedimentos à realização de actividades de investigação advêm da falta de preparação que o professor possa sentir para ultrapassar os diversos obstáculos com que se depara. Outros problemas podem decorrer do facto do professor possuir uma visão parcial ou redutora do que significa investigar. Torna-se, assim, imprescindível que ele tenha acesso a material diversificado e que sejam criadas condições para que possa discutir em conjunto com outros colegas sobre esta problemática.

A margem deixada pelos actuais programas para a integração de investigações matemáticas não é muito explícita. Exige-se, por isso, algum engenho ao professor para manobrar no espaço deixado ao seu cuidado.

Extracto do livro

Ponte, João Pedro da (et al.) (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (pag.15 – 23)